

Глава 3 Дополнительный материал

— Введение —

Вы из тех, кто хотел бы, чтобы в кратких описаниях уроков было больше примеров, обсуждений и комментариев? Если да, то вы попали в нужное место! Этот файл содержит дополнительные материалы для некоторых заданий из главы 3.

Для головоломок приводится множество примеров решений, а также дополнительные комментарии о том, как их создавать. Программа Early Family Math основана на идее того, что раннее обучение математике - это то, чем семья должна заниматься вместе, а создание головоломок вместе с вашим ребёнком является важной частью этого процесса. Как только вы освоите каждую головоломку, вы обнаружите, что большинство, если не все головоломки, довольно легко создать.

Многие из этих головоломок имеют разные уровни сложности, и на следующих страницах есть много предложений и примеров о том, как их создавать. Всегда начинайте с самых простых головоломок. Гораздо лучше, чтобы ваш ребенок испытал успех, всё понимал и развлекался, разгадывая слишком простые головоломки, чем расстраивался и разочаровывался, усложняя себе задачу решать слишком трудные. Как только ребенок приобретет уверенность и увлечется математической деятельностью, следует постепенно переходить к более сложным задачам. Кроме того, не все головоломки будут интересны каждому, поэтому не решайте задания, которые вам не нравятся.

На следующих страницах вы найдете:

- Глава 3 — Суммы фигур
- Глава 3 — Ним удваивает лимит
- Глава 3 — Подсчет чётных и нечётных
- Глава 3 — Группы сумм
- Глава 3 — Спасение в зоопарке
- Глава 3 — Общие суммы
- Глава 3 — Варианты sudoku
- Глава 3 — Сколько способов?
- Глава 3 — Порядок колоды карт
- Глава 3 — Пирамида различий

— Юридические вопросы —

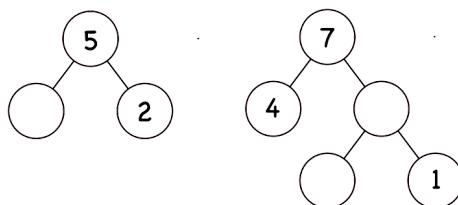
Каждая семья должна иметь возможность учиться математике и наслаждаться ею вместе. С этой целью Early Family Math представляет собой сборник материалов, которые семьи и преподаватели могут свободно редактировать, переводить, копировать и распространять, не спрашивая разрешения, только для некоммерческого использования.

© Copyright Early Family Math - Chris Wright 2021 v. 1.1 Creative Commons: Attribution-NonCommercial 4.0 Международная лицензия

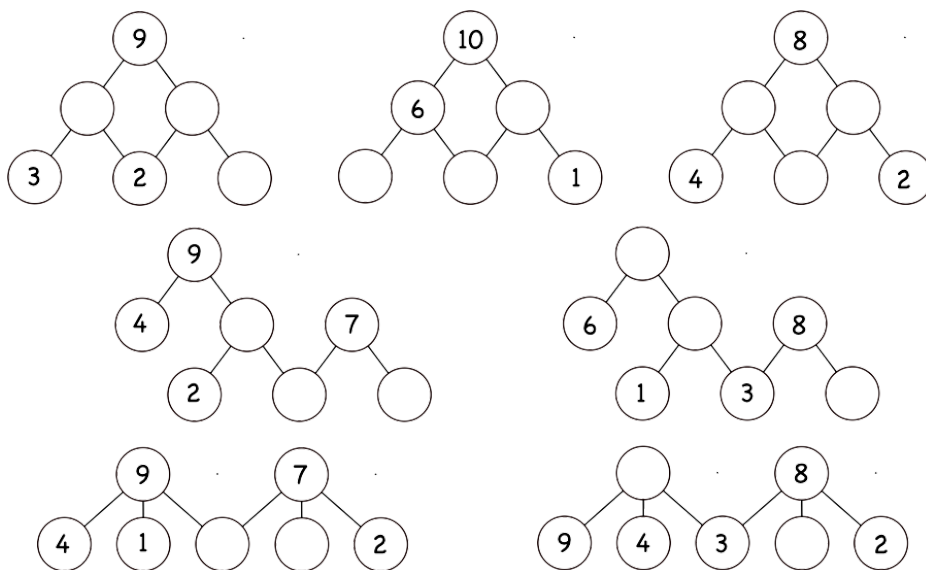
Глава 3 — Суммы фигур

В этих головоломках используются пронумерованные кружки, расположенные в виде пирамиды, и каждый кружок представляет собой сумму всех кружков, расположенных непосредственно под ним.

В самых простых головоломках большинство кружков закрашено. Вот два примера, которые легко решить.



Эти головоломки можно усложнить, добавляя дополнительные круги в разных направлениях. Все следующие семь головоломок являются прямыми вычислениями, кроме самой правой в первом ряду. Она сложнее, потому что к одному кругу в нижнем ярусе относятся два круга над ним, значения которых неизвестны. Эта головоломка состоит из достаточно маленьких чисел, поэтому ее можно легко решить с помощью небольшого количества проб и ошибок.



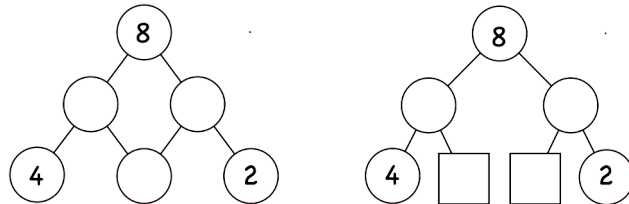
Ещё один способ усложнить эти головоломки — использовать формы, помимо круглых. Хотя значение в круге может повторять или не повторять значение в другом круге или форме, значение в определенной форме должно быть одинаковым везде. Например: все квадраты имеют одинаковое значение.

Используйте подходящие формы, чтобы попрактиковаться в добавлении одинаковых, около-одинаковых, а также деленных пополам чисел.

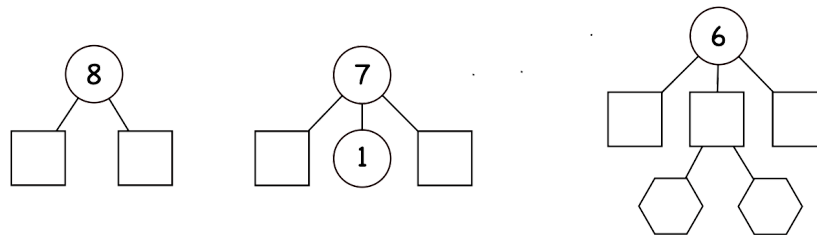
Если хотите, можете добавить правило, согласно которому две разные формы должны иметь разные значения. Например, квадрат и шестиугольник.

Составьте любую из этих головоломок, начав с полностью заполненной диаграммы, а затем удалите несколько цифр. Если в головоломке есть несколько повторяющихся чисел, используйте квадрат или другую форму вместо круга для этого повторяющегося числа.

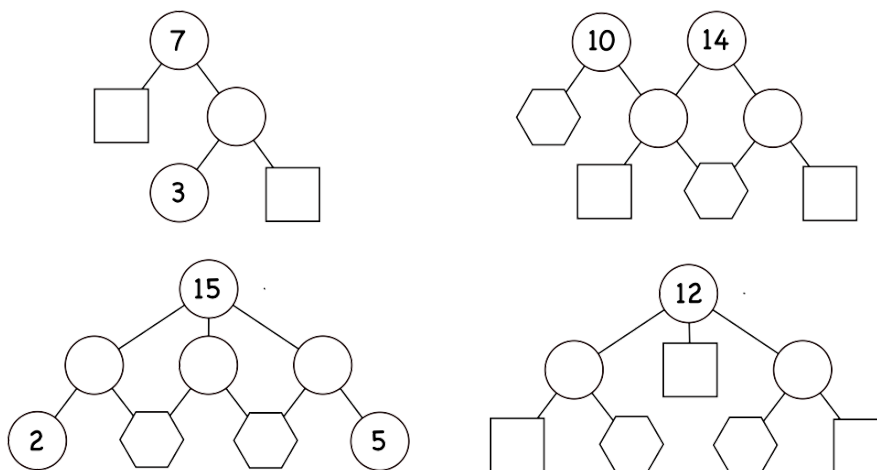
Следующие две головоломки иллюстрируют психологическую разницу между использованием круга с двух сторон и заменой круга двумя квадратами. Эти две головоломки по сути одинаковы, но маленькому ребенку будет намного легче понять первую и работать с ней. Пожалуйста, дайте вашему ребенку много практики с головоломками, состоящими только из круга, прежде чем переходить на более сложные головоломки некруглой формы.



Головоломки, подобные следующим трем, полезны для отработки сложения одинаковых, около-одинаковых чисел, а также простых.



Вот несколько примеров использования некруглых фигур для создания более сложных головоломок. Если вашему ребенку понравится, есть еще много вариантов, которые стоит изучить. Удачного решения головоломки!



Глава 3 — Ним удваивает лимит

— Одна стопка —

Установите начальную сумму, например 20. Пусть ваш ребенок выберет сам, ходить ему первым или вторым. Во время первого хода игрок вычитает 1 или 2. После первого хода игрок может вычесть любое число от 1 до числа вдвое больше того, которое вычли в прошлом ходу. Побеждает тот, кто первым достигнет 0.

Есть много альтернативных версий этой игры. Вот некоторые из них:

- Первый, кто достигает 0, проигрывает.
- Вместо диапазона от 1 до 2, начальный диапазон — от 1 до числа, на единицу или две меньше, чем целевое число.
- Практикуйте сложение, а не вычитание, начиная с 0, чтобы достичь победы (или проигрыша).
- Начальный предел на единицу (или две) меньше целевого числа. Вместо удвоения значения предыдущего хода, используйте его в качестве ограничения.
- Начальный предел на единицу (или две) меньше целевого числа. Вместо удвоения предыдущего хода используйте его утроенное значение.

Как видите, существует множество вариаций. Если игра вам понравится, можете установить свои собственные, семейные правила.

В сравнении с другими версиями Ним, где используют фиксированный набор ходов, эту игру намного сложнее анализировать.

— Более одной стопки —

Один из способов создать новые вариации этой игры — использовать более одного числа. Представьте, у вас несколько стопок фишек (камешки, кусочки еды). Например, есть две стопки: 12 фишек в одной и 8 — в другой. Главное правило: можно брать любое количество фишек, но все они должны быть из одной стопки.

Альтернативные версии этой игры:

- Игра с более чем двумя стопками.
- Возможность брать одинаковое количество фишек из всех стопок.
- Возможность брать одинаковое количество фишек из выбранных вами стопок.
- Возможность брать фишек только из самой большой стопки.

Как видите, существует ещё множество вариантов этой игры. Но, вероятно, приведённых выше будет более чем достаточно!

Глава 3 — Подсчет чётных и нечётных

— Основная подготовка —

Возьмите небольшую колоду карт с маленькими значениями. Начните с трёх карточек, а позже добавьте больше, если ребенку понравилось рассматривать их.

Предположим, это числа 1, 2 и 3. Вопрос в следующем: если вы случайным образом выберете две карточки и сложите их, вы с большей вероятностью получите чётное или нечётное число?

Есть два способа разобраться в этом. Один из способов — проводить эксперименты. Перемешайте колоду, случайным образом выберите две карты и посмотрите на сумму: чётная или нечётная? После каждого эксперимента ставьте галочку в соответствующем столбце на листе бумаги для подсчета результатов.

Второй способ — посчитать, сколько существует способов получить нечётное число по сравнению с чётным. Например, в случае использования 1, 2 и 3 существует один способ получить чётное число ($1 + 3$) и два способа получить нечётное число ($1 + 2$, $2 + 3$). Таким образом, для чисел 1, 2 и 3 вероятность того, что сумма окажется нечётной, в два раза выше.

После того, как вы поиграете с 1, 2 и 3, попробуйте другие группы из трех карт. Отличается ли результат группы из 2, 3 и 4? В группах 1, 3, 5 и 2, 4, 6 могут получиться только чётные числа — почему? Поиграв с тремя картами, посмотрите, что происходит с 4 и более.

Чтобы сделать из этого игру, пусть один игрок будет чётным числом, а другой - нечётным. Посмотрите, у кого больше всего успехов после десятка пробных раундов.

— Изучение —

Самое интересное в изучении, что оно предлагает человеку поиграть с числами и стать математиком. Как упоминалось ранее, поиграйте с разными группами из трёх чисел. Поэкспериментировав, ваш ребенок может заметить, что любая группа из трёх чисел, в которой есть хотя бы одно чётное и одно нечётное число, ведет себя одинаково. Однако, если все числа нечётные или, наоборот, чётные, то все суммы тоже будут чётными. Возникает вопрос: почему это происходит?

После некоторых экспериментов даже маленький ребенок может наткнуться на прекрасное правило теории чисел, которое гласит:

- Чётное плюс чётное — чётное
- Чётное плюс нечетное — нечётное
- Нечётное плюс нечётное — чётное

Почему это правило работает? Разделите чётные и нечётные числа на два ряда фишек. Когда при их сложении получается два одинаковых ряда?

Как только это правило будет обнаружено, ваш ребенок может осознать, что конкретные числа не имеют большого значения. Группа 1, 2, 3 на самом деле ничем не отличается от 3, 4, 5 (или 3, 12, 17). Результат действительно зависит от того, сколько чётных и нечётных чисел.

Не забывая об этом, ниже приведена таблица возможных результатов для групп из трёх и четырёх.

3 числа:

- 3 чётных, 0 нечётных – 3 чётных суммы
- 2 чётных, 1 нечётное – 1 чётная сумма, 2 нечётных суммы
- 1 чётное, 2 нечётных – 1 чётная сумма, 2 нечётные суммы
- 0 чётных, 3 нечётных – 3 чётные суммы

4 числа:

- 4 чётных, 0 нечётных – 6 чётных сумм
- 3 чётных, 1 нечётное – 3 чётные суммы, 3 нечётные суммы
- 2 чётных, 2 нечётных – 2 чётные суммы, 4 нечётные суммы
- 1 чётное, 3 нечётных – 3 чётные суммы, 3 нечётные суммы
- 0 чётных, 4 нечётных – 6 чётных сумм

Результаты удивительны и оставляют много для самостоятельного изучения, если кому-то стало интересно! Что происходит с 5, 6 числами или более? Почему замена чётных и нечётных чисел не меняет результатов? Например, если у вас 3 чётных и 1 нечётное, вы получите те же результаты, что и с 1 чётным и 3 нечётными. Почему в таких случаях, как 3 чётных и 1 нечётное, результаты получаются равными, если изначально количество чётных и нечётных было неравным? Это классная математика, которой может заняться даже маленький ребенок!

Глава 3 — Группы сумм

В этих головоломках используется числовая сетка с целевой суммой. Найдите группы из двух, трех или четырех чисел, которые в сумме дают целевое. Числа группы должны иметь общие стороны. Используйте фишки — например, разные кусочки еды — чтобы обозначить каждую группу. В итоге головоломка будет состоять из определенных групп.

6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td style="background-color: #d9ead3;">1</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td></tr><tr><td style="background-color: #d9ead3;">5</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">4</td></tr><tr><td style="background-color: #d9ead3;">1</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td></tr></table>	1	2	2	5	3	4	1	3	3
1	2	2								
5	3	4								
1	3	3								

8	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td style="background-color: #d9ead3;">0</td><td style="background-color: #d9ead3;">8</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td></tr><tr><td style="background-color: #d9ead3;">2</td><td style="background-color: #d9ead3;">4</td><td style="background-color: #d9ead3;">4</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td></tr><tr><td style="background-color: #d9ead3;">6</td><td style="background-color: #d9ead3;">5</td><td style="background-color: #d9ead3;">5</td><td style="background-color: #d9ead3;">7</td></tr><tr><td style="background-color: #d9ead3;">1</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">1</td></tr></table>	0	8	3	2	2	4	4	3	6	5	5	7	1	2	3	1
0	8	3	2														
2	4	4	3														
6	5	5	7														
1	2	3	1														

Эти головоломки служат хорошей практикой числовых связей. Вы сможете использовать лист головоломки снова и снова, если будете пользоваться фишками вместо карандаша.

Сперва начните с пустой сетки и расставьте числа, используя пары и тройки, которые в сумме дают целевую сумму. Будет веселее, если у головоломки есть только одно решение, но не беспокойтесь об этом, если это не так.

6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	1	2	2	5	3	4	1	3	3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>1</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr></table>	1	6	2	1	0	4	4	1	5	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	2	3	5	3	4	1	3	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	4	2	1	3	5	1	3	1	4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	0	1	5	5	4	3	3	2
1	2	2																																																
5	3	4																																																
1	3	3																																																
1	6	2																																																
1	0	4																																																
4	1	5																																																
1	2	3																																																
5	3	4																																																
1	3	2																																																
4	2	1																																																
3	5	1																																																
3	1	4																																																
1	0	1																																																
5	5	4																																																
3	3	2																																																

6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr></table>	5	1	4	2	3	1	3	3	2	2	3	1	5	1	4	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	4	5	1	3	2	1	3	3	5	2	2	4	1	3	1	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr></table>	1	5	2	4	3	2	3	2	1	1	2	4	3	3	5	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	1	5	2	1	3	2	1	5	1	2	3	1	2	4	3	3
5	1	4	2																																																																	
3	1	3	3																																																																	
2	2	3	1																																																																	
5	1	4	2																																																																	
4	5	1	3																																																																	
2	1	3	3																																																																	
5	2	2	4																																																																	
1	3	1	2																																																																	
1	5	2	4																																																																	
3	2	3	2																																																																	
1	1	2	4																																																																	
3	3	5	1																																																																	
1	5	2	1																																																																	
3	2	1	5																																																																	
1	2	3	1																																																																	
2	4	3	3																																																																	

7	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	2	4	3	5	2	1	6	1	4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>2</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	2	6	1	1	4	5	4	3	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>7</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>	7	1	3	0	3	4	1	6	3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>5</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>0</td></tr></table>	5	1	1	4	4	3	3	7	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>5</td></tr></table>	4	4	3	1	2	2	6	1	5
2	4	3																																																
5	2	1																																																
6	1	4																																																
2	6	1																																																
1	4	5																																																
4	3	2																																																
7	1	3																																																
0	3	4																																																
1	6	3																																																
5	1	1																																																
4	4	3																																																
3	7	0																																																
4	4	3																																																
1	2	2																																																
6	1	5																																																

7	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	5	2	1	1	6	1	2	6	3	4	3	1	4	3	5	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	6	1	4	1	4	5	2	3	3	2	3	4	1	6	3	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	4	5	2	1	3	1	3	4	2	3	4	2	3	2	2	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	5	3	4	1	5	4	3	6	2	1	6	6	1	2	5
5	2	1	1																																																																	
6	1	2	6																																																																	
3	4	3	1																																																																	
4	3	5	2																																																																	
6	1	4	1																																																																	
4	5	2	3																																																																	
3	2	3	4																																																																	
1	6	3	1																																																																	
4	5	2	1																																																																	
3	1	3	4																																																																	
2	3	4	2																																																																	
3	2	2	1																																																																	
2	5	3	4																																																																	
1	5	4	3																																																																	
6	2	1	6																																																																	
6	1	2	5																																																																	

8	<table border="1"><tr><td>5</td><td>1</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	5	1	7	1	2	3	6	2	5	<table border="1"><tr><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	6	2	4	3	1	4	5	3	4	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	4	4	1	4	2	7	2	3	5	<table border="1"><tr><td>7</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	7	1	0	1	2	8	5	3	5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>2</td></tr></table>	1	0	4	4	8	4	3	6	2
	5	1	7																																															
	1	2	3																																															
6	2	5																																																
6	2	4																																																
3	1	4																																																
5	3	4																																																
4	4	1																																																
4	2	7																																																
2	3	5																																																
7	1	0																																																
1	2	8																																																
5	3	5																																																
1	0	4																																																
4	8	4																																																
3	6	2																																																

8	<table border="1"><tr><td>0</td><td>8</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	0	8	3	2	2	4	4	3	6	5	5	7	1	2	3	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>7</td></tr></table>	2	3	5	3	6	4	3	2	2	4	3	5	4	2	1	7	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr></table>	2	3	2	1	3	2	5	2	1	6	1	3	7	4	4	2	<table border="1"><tr><td>7</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	7	1	2	3	2	1	6	5	3	5	1	3	5	4	4	4
	0	8	3	2																																																																
	2	4	4	3																																																																
	6	5	5	7																																																																
1	2	3	1																																																																	
2	3	5	3																																																																	
6	4	3	2																																																																	
2	4	3	5																																																																	
4	2	1	7																																																																	
2	3	2	1																																																																	
3	2	5	2																																																																	
1	6	1	3																																																																	
7	4	4	2																																																																	
7	1	2	3																																																																	
2	1	6	5																																																																	
3	5	1	3																																																																	
5	4	4	4																																																																	

9	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	0	9	4	6	5	4	3	4	<table border="1"><tr><td>5</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	5	6	3	4	5	7	3	1	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>9</td><td>5</td></tr></table>	1	2	7	3	5	4	0	9	5	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	4	1	8	2	3	3	5	4	6	<table border="1"><tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr></table>	7	4	5	2	6	2	1	8	1
	1	0	9																																															
	4	6	5																																															
4	3	4																																																
5	6	3																																																
4	5	7																																																
3	1	2																																																
1	2	7																																																
3	5	4																																																
0	9	5																																																
4	1	8																																																
2	3	3																																																
5	4	6																																																
7	4	5																																																
2	6	2																																																
1	8	1																																																

9	<table border="1"><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>8</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	5	4	3	6	7	4	2	3	2	5	3	6	8	1	1	3	<table border="1"><tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	5	5	4	5	2	4	2	7	2	6	3	6	1	8	1	2	<table border="1"><tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	5	2	2	1	3	5	2	6	3	1	3	4	3	7	2	5	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr></table>	2	3	6	3	7	5	3	3	2	2	7	2	5	4	1	8
	5	4	3	6																																																																
	7	4	2	3																																																																
	2	5	3	6																																																																
8	1	1	3																																																																	
5	5	4	5																																																																	
2	4	2	7																																																																	
2	6	3	6																																																																	
1	8	1	2																																																																	
5	2	2	1																																																																	
3	5	2	6																																																																	
3	1	3	4																																																																	
3	7	2	5																																																																	
2	3	6	3																																																																	
7	5	3	3																																																																	
2	2	7	2																																																																	
5	4	1	8																																																																	

10	<table border="1"><tr><td>8</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr></table>	8	2	3	5	3	4	5	7	3	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td><td>4</td></tr></table>	6	5	5	1	3	6	2	8	4	<table border="1"><tr><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>	7	5	4	3	1	9	4	6	1	<table border="1"><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td></tr></table>	4	2	1	4	5	3	4	1	6	<table border="1"><tr><td>1</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	9	7	4	3	3	3	4	6
	8	2	3																																															
	5	3	4																																															
5	7	3																																																
6	5	5																																																
1	3	6																																																
2	8	4																																																
7	5	4																																																
3	1	9																																																
4	6	1																																																
4	2	1																																																
4	5	3																																																
4	1	6																																																
1	9	7																																																
4	3	3																																																
3	4	6																																																

10	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>7</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	5	3	2	4	3	7	4	5	3	5	6	3	4	1	4	<table border="1"><tr><td>8</td><td>9</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td>9</td></tr></table>	8	9	1	3	1	1	3	4	6	3	5	5	4	7	1	9	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>	4	1	5	5	5	3	2	1	6	5	7	2	4	1	6	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>8</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>9</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	6	8	2	3	1	3	6	3	1	6	5	7	9	4	5
	1	5	3	2																																																																
	4	3	7	4																																																																
	5	3	5	6																																																																
3	4	1	4																																																																	
8	9	1	3																																																																	
1	1	3	4																																																																	
6	3	5	5																																																																	
4	7	1	9																																																																	
4	1	5	5																																																																	
5	3	2	1																																																																	
6	5	7	2																																																																	
4	1	6	3																																																																	
1	6	8	2																																																																	
3	1	3	6																																																																	
3	1	6	5																																																																	
7	9	4	5																																																																	

Глава 3 — Спасение в зоопарке

— Описание игры —

В этой игре используйте два кубика или два набора числовых карточек от 1 до 6. У каждого игрока есть первый набор из 6 карт — карточки с животными подойдут идеально, если они у вас есть. У каждого игрока также есть лист бумаги с ячейками, пронумерованными от 0 до 5. Каждый игрок решает, куда поставить 6 своих «животных» — можно ставить одного и более в одну ячейку.

Во время хода игрока выбираются два числа путем броска кубиков или взятия двух карт, а затем используется разность этих чисел. Игрок может освободить одного из своих «животных», если оно находится в клетке. Побеждает тот игрок, который первым спасет все свои карты.

— Стратегия размещения карточек —

Как игроку следует разместить 6 карт? Как это часто бывает, давайте начнем с более простого вопроса: где лучше всего разместить первую? Это явно будет в поле, которое выпадет с наибольшей вероятностью. Вместо того, чтобы проводить какой-либо сложный анализ, мы можем просто перечислить возможности и посмотреть, какие различия возникают чаще всего.

1-1	0		2-1	1		3-1	2		4-1	3		5-1	4		6-1	5
1-2	1		2-2	0		3-2	1		4-2	2		5-2	3		6-2	4
1-3	2		2-3	1		3-3	0		4-3	1		5-3	2		6-3	3
1-4	3		2-4	2		3-4	1		4-4	0		5-4	1		6-4	2
1-5	4		2-5	3		3-5	2		4-5	1		5-5	0		6-5	1
1-6	5		2-6	4		3-6	3		4-6	2		5-6	1		6-6	0

Подсчитывая результаты, мы имеем: 0 - 6, 1 - 10, 2 - 8, 3 - 6, 4 - 4, 5 - 2. Итак, вариант 1 — лучший выбор, и произойдет в 10/36 случаях. Мы можем расположить их в порядке частоты: 1, 2, 3, 0, 4 и 5.

Гораздо сложнее такой вопрос: что делать с более чем одной карточкой? Увидев эти числа, старший ребенок может спросить: почему бы вам просто не поставить все свои карточки на единицу? Чтобы увидеть ответ на этот вопрос, представьте более простую ситуацию, когда у вас есть только две карточки, и вы проигнорировали все результаты, отличные от 1 или 2. Тогда вероятность выпадения 1 — $10/18$, а 2 — $8/18$. Если вы положите обе карты на 1, то она должна выпасть два раза подряд, чтобы вы выиграли после двух бросков. Однако, если вы положите карту и на 1, и на 2, вы выиграете после двух бросков с 1 и 2 или 2 и 1 — вероятность того, что это произойдет, примерно на 60% выше!

Вместо того, чтобы вдаваться в долгий и подробный анализ, давайте облегчим себе задачу и будем полагаться на интуицию. Поместите часть ваших карточек на 1, и вторую — на 2 и, возможно, один на 0 или 3. Нет никаких гарантий, что вы выиграете, но в долгосрочной перспективе всё должно получиться!

Глава 3 — Общие суммы

— Введение —

Возьмите лист бумаги и начертите 12 рядов. В каждом ряду по 8 клеток. В крайнем левом столбце клеток записаны числа от 1 до 12. Положите по 1 фишке на каждое из 12 номеров. Бросьте пару игральных кубиков. После каждого броска перемещайте фишку, соответствующую сумме очков на кубиках, на одну клетку вправо. Цель каждой фишки — первой достичь крайней правой клетки. Дайте вашему ребенку возможность задать вопросы. Возникают такие естественные вопросы, как:

- Какая фишка выиграет и почему?
- Какие фишки выигрывают чаще всего, а какие реже?
- Какая фишка хуже всего?
- Как изменятся победители, если в рядах будет меньше или больше клеток?

Попросите ребенка объяснить свои идеи относительно ответов на эти вопросы, а затем изучите их идеи, проводя эксперименты.

Добавьте к решению головоломки элемент соревнования, делая ставки до начала раунда о том, какая фишка выиграет.

— Анализ —

Как и в случае с анализом предыдущей игры, самый простой способ проанализировать — это перечислить все возможности.

1 + 1	2		2 + 1	3		3 + 1	4		4 + 1	5		5 + 1	6		6 + 1	7
1 + 2	3		2 + 2	4		3 + 2	5		4 + 2	6		5 + 2	7		6 + 2	8
1 + 3	4		2 + 3	5		3 + 3	6		4 + 3	7		5 + 3	8		6 + 3	9
1 + 4	5		2 + 4	6		3 + 4	7		4 + 4	8		5 + 4	9		6 + 4	10
1 + 5	6		2 + 5	7		3 + 5	8		4 + 5	9		5 + 5	10		6 + 5	11
1 + 6	7		2 + 6	8		3 + 6	9		4 + 6	10		5 + 6	11		6 + 6	12

Суммируя частоту, мы имеем: 1 - 0, 2 - 1, 3 - 2, 4 - 3, 5 - 4, 6 - 5, 7 - 6, 8 - 5, 9 - 4, 10 - 3, 11 - 2, 12 - 1. Это числа, которые хорошо бы запомнить для любой игры в кости, в которой необходимо суммировать два кубика!

Таким образом, 1 всегда будет проигрывать, а 7 с наибольшей вероятностью выиграет. Однако разница в частоте между 7 и 6 или 8 не очень велика. Если вы просто сделаете несколько бросков, будет очень трудно с уверенностью предсказать, какой из них выиграет. Только когда вы сделаете много бросков, вы сможете гарантировать, что 7 выиграет в конечном итоге.

Глава 3 — Варианты sudoku

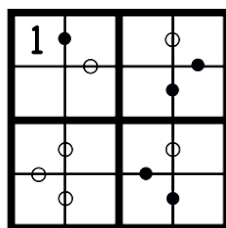
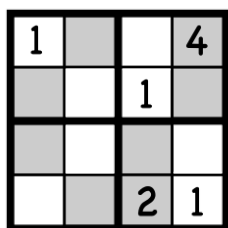
В мире существует очень много разновидностей sudoku, и есть еще больше других головоломок, похожих на эти разновидности. В этой главе мы рассмотрим пять вариантов sudoku. Все они следуют правилу «латинского квадрата» — каждое число встречается ровно один раз в каждой строке и столбце.

Вы можете составить любой из этих sudoku, начав с заполненной головоломки соответствующего типа — латинского квадрата или пазл-sudoku. Все решения sudoku, приведенные в дополнительных материалах к главам 1-2, могут пригодиться вам. Когда у вас будет решение, добавьте дополнительную информацию, необходимую для этого вида головоломки, и избавьтесь от некоторых или всех чисел.

— Пазл-sudoku с дополнительной информацией —

Эти два типа головоломок представляют собой латинские квадраты с дополнительным ограничением, заключающимся в том, что в каждой подобласти каждое число встречается в ней ровно один раз. Помимо того, что они представляют собой sudoku-пазл, они обладают дополнительными свойствами.

Чётно-нечётные sudoku. В этих головоломках чётные числа выделены серым цветом. Такая дополнительная информация, как правило, делает головоломки очень легкими, и можно избавиться от практически всех чисел.



Судоку-точки. Это — обычное sudoku, за исключением того, что между ячейками добавляются точки двух типов. Если точка пустая, то разность этих двух чисел равна единице. Если точка заполнена, то одно число равно половине другого числа. Подобно головоломкам из «Чётно-нечётные», дополнительная информация упрощает головоломку, а это означает, что почти все числа можно удалить.

— Судоку со сложением и вычитанием —

Эти головоломки разбиты на подобласти, которые имеют целевой номер, присвоенный им. В отличие от стандартного sudoku, разрешено повторение числа в подобласти, если головоломка представляет собой латинский квадрат. Если в подобласти есть только один квадрат, то целевым числом будет значение этого квадрата.

В «sumdoku» sudoku сумма всех чисел в подобласти является заданным целевым числом. В «diffdoku» sudoku целевое число — разность двух чисел, находящихся в подобласти. Все подобласти состоят из одного или двух квадратов.

3+		3	7+
6+	4+		
		6+	4+
7+			

3-	1-	3	2-
		3-	
1-	1		2-
	2-		

В головоломке «sumdiffdoku» sudoku используются как сложение, так и вычитание. Подобласти отмечены знаком «+» или «-», чтобы указать, следует искать сумму или разность.

Существует три типа головоломок, которые обычно даны без каких-либо цифр. Конечно, подобласти с одним квадратом по сути уже заполнены числами. Для маленького ребенка можно указать несколько чисел, чтобы решить головоломку в пределах их уровня сложности.

Чтобы изменять математические вычисления, берите разные группы чисел вместо привычных — от 1 до 4 — для 4 на 4. Например, возьмите числа 1, 3, 5 и 7. Затем, перечислите числа над головоломкой, чтобы ваш ребенок знал, что можно использовать.

Глава 3 — Сколько способов?

Подсчет количества способов сделать выбор может привести к интересным результатам. Большинство таких ситуаций лучше рассматривать как систему. Ребенку это сложно сделать, но это — нормально. Будет лучше, если он поиграет и получит удовольствие от исследования. Систематичность может подождать, пока он вырастет.

— Исследование 1 —

Рисуя только красным и синим, сколькими способами вы можете нарисовать монстра с глазами, в шляпе и накидке? Как изменится ситуация, если вы раскрасите только шляпу и плащ? Как бы она изменилась, если бы вы использовали три цвета или если бы вы могли использовать каждый цвет только один раз?

Более сложное исследование требует умножения, но для этого еще рано. Тем не менее, ваш ребенок может поиграть с этими идеями и начать развивать чувство того, как вести такой счет.

Давайте разберёмся с этими вопросами по очереди. Шляпа может быть красной или синей, глаза могут быть красными или синими, и накидка может быть красной или синей. Каждый объект, который нужно раскрасить, удваивает количество возможных вариантов. Таким образом, удваиваем 2, получаем 4, а затем удваиваем ещё раз и получаем 8 возможных событий. Их перечисление — хороший способ увидеть все вариации. Пусть R — красный, а B — синий. Перечислим цвета в порядке: шляпа, глаза, накидка. Возможные варианты: RRR, RRB, RBR, RBB, BRR, BRB, BBR, BBB.

Раскрашивание только шляпы и накидки удваивает 2, что даёт нам 4 возможных события. Варианты: RR, RB, BR, BB.

Если бы у вас было три цвета для трех вещей, которые нужно раскрасить, было бы $3 \times 3 \times 3 = 27$ возможностей (длинный список).

В общем, если у вас есть события, которые не влияют друг на друга, умножьте возможности. Если вам разрешено использовать каждый цвет только один раз, события ограничивают друг друга и влияют друг на друга. Давайте перечислим их, используя G (зеленый) для третьего цвета: RGB, RGB, BGR, BRG, GRB, GBR.

— Исследование 2 —

У вас есть ряд из 5 одинаковых конфет. Сколько есть способов раскрасить их, чтобы получить 2 красных и 3 синих?

Отметьте 2 листа бумаги знаком R и 3 листа бумаги знаком B. Ваш ребенок может поиграть с десятью способами их расположения. Список следующий: RRBBBB, RBRBB, RBBRB, RBBBR, BRRBB, BRBRB, BRBBR, BBRRB, BBRBR, BBBRR. Один из способов взглянуть на это состоит в том, что, как только вы определите 2 места для красного, то у синего не будет выбора: он должен будет занять другие 3 места. Интересно, что вы также можете посмотреть на это с другой стороны, разместив 3 синих части первыми.

Если вам понравится, то продолжите исследование, изменив три числа — просто убедитесь, что два меньших числа в сумме дают общее количество конфет.

— Исследование 3 —

Найдите все способы получить сумму, складывая 1 и 2. Делайте это с учетом и без учета порядка.

Не думайте о порядке. Посмотрите на пример сложения до 4. Возможные варианты: $1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1$ и $2 + 2$. Сделать это можно тремя способами. Попробовав еще несколько примеров, вы понимаете, что подсчитываете количество способов использования двоек для суммирования чисел, меньших или равных 4. У вас может быть от 0 до 2 двоек, поэтому есть 3 способа получить 4. В общем, ответ будет равен половине числа плюс один — для чётных чисел, и половине числа, округленного вниз, плюс один — для нечётных чисел.

Учитывайте порядок. В примере 4 возможны следующие варианты: $1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1$, $1 + 2 + 1$, $1 + 1 + 2$ и $2 + 2$. Итак, есть 5 способов получить 4. Поиграйте с множеством примеров и составьте таблицу результатов. Вот что вы должны получить (хотя, вы, скорее всего, не добрались до 10):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Посмотрев на эти числа, ваш ребенок может заметить, что каждая пара чисел складывается и получается следующее число. Почему это происходит? Эти числа называются числами Фибоначчи, и они появляются достаточно часто.

Чтобы понять, почему эти числа встречаются в этом исследовании, посмотрите на пример с числом 4 и на последнее число, использованное при складывании. Последнее число — либо 1, либо 2. Если это 1, то предыдущие числа указывают все способы сложения до 3. Если последнее число — 2, то предыдущие числа указывают все способы сложения до 2. Итак, количество способов сложения до 4 — сумма способов сложения до 3 и способов сложения до 2.

Большие числа. Если вам понравилось, вы можете поиграть с количеством способов получения сумм, включающих числа от 1 до 3 или даже от 1 до 4. Искать закономерности в этих случаях намного сложнее, но играть с числами будет также весело.

Глава 3 — Порядок колоды карт

— Введение —

Задача состоит в том, чтобы сложить колоду пронумерованных карт, например от 1 до 5, так, чтобы выполнялось следующее условие:

Верхняя карта равна 1. Отложите эту верхнюю карту. Переместите следующую карту в нижнюю часть колоды. Следующая карта - 2 и откладывается. Переместите следующую карту в нижнюю часть колоды. Продолжайте, пока все карты не будут разложены по порядку.

Как только ваш ребенок научится этому с числами от 1 до 5, предложите ему сделать это для большего диапазона чисел.

— Будьте систематичны —

Сложность этой головоломки заключается в систематичности. Она предназначена для колоды карт любого размера. Вы можете поиграть с ней и в конечном итоге придумать ответ. Давайте поищем интересные закономерности, которые упростят задачу.

Допустим, вы раскладываете карты на столе по порядку. Вот решения для первых нескольких случаев. Цифры, перечисленные после стрелки, показывают порядок оставшихся карт после первого расклада карт.

1

1 2 -> 2

1 3 2 -> 3

1 3 2 4 -> 3 4

1 5 2 4 3 -> 5 4

1 4 2 6 3 5 -> 4 6 5

1 6 2 5 3 7 4 -> 6 5 7

Если количество карточек чётное (скажем, 6), то нечетные позиции заполняются первой половиной карточек по порядку (в данном случае 3), а остальные позиции заполняются решениями для вдвое меньшего числа карт, только со сдвигом значений вверх. В примере для 6, нечётные места заполнены цифрами 1, 2, 3, а чётные — цифрами 4, 6, 5. В таком случае, каждое из значений — 1, 3, 2 — (для колоды из трех карт) увеличиваются на 3.

Схема решения для нечётного количества карт немного сложнее. Как и раньше, нечётные места заполняются первой половиной чисел (от 1 до 4 в случае с 7). Если вы посмотрите на примеры, первая карта после стрелки будет перемещена в конец, поэтому она должна быть последней картой в этой последовательности. После этого наблюдения решение такое же, как в четном случае.

Глава 3 — Пирамида разностей

— Введение —

Задача состоит в том, чтобы расположить числа от 1 до 6 в пирамиде с одной карточкой в верхнем ряду, двумя — во втором, и тремя — в третьем, где каждое число представляет собой разность двух чисел под ним.

Если у вас возникли проблемы, вот два совета, которые смогут помочь: цифра 6 должна быть в нижнем ряду, потому что она не может быть разностью для какой-либо пары чисел. Аналогично, 5 должна быть либо в нижнем ряду, либо в среднем ряду над 6 и 1.

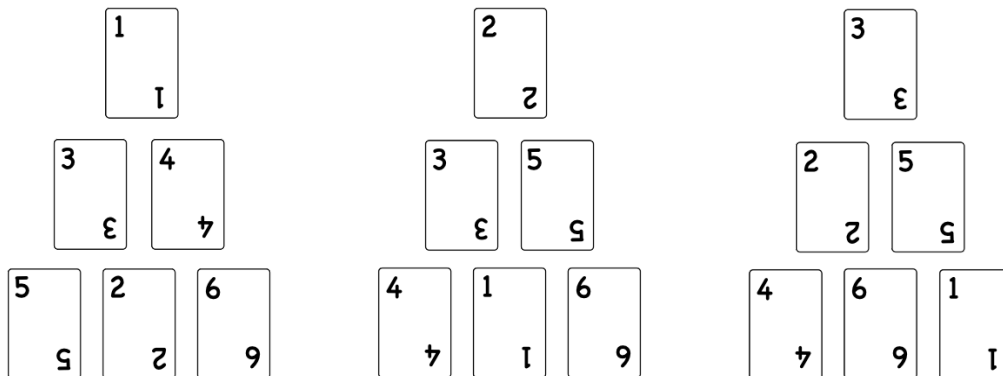
— Что такое «разные» решения? —

Если ваш ребенок считает эту головоломку простой, предложите ему найти все способы ее решения. Обсудите, что означает различие двух решений — если одно решение является зеркальным отображением другого, следует ли считать его другим?

Будет полезно ответить на вопрос о том, что делает решения разными. Поскольку зеркальное отображение любого решения легко сделать, и оно также является решением, имеет смысл игнорировать их. Игнорирование зеркальных отображений вдвое сократит количество решений для рассмотрения.

Например, мы можем предположить, что цифра 6 находится не только в нижнем ряду, но и в средней или правой части нижнего ряда. Что касается 5, в нижнем ряду может быть только четыре возможных варианта: 5 «а» 6, «b» 5 6, «с» 1 6 или «d» 6 1.

На этом этапе нужно просмотреть различные возможные значения a, b, c и d. После некоторых проб и ошибок вы обнаружите, что a равно 2, b никогда не сработает, c и d равны 4. Итак, игнорируя зеркальные решения, получается ровно три:



— Большие пирамиды —

Давайте воспользуемся карточками с 1 по 10, чтобы составить пирамиду из четырех рядов. Это намного сложнее. Можно разместить несколько карт, но после этого потребуются определенная решимость. Поскольку 10 не может быть разностью двух карт, то 10 должно быть в нижнем ряду. Точно так же 9 находится либо в нижнем ряду, либо в ряду над 1 и 10. Карты 8 и 7 тоже подходят, чтобы избавиться от лишних возможных решений.

Это означает, что нижний ряд может выглядеть следующим образом (без учета зеркальных отображений):

a b 9 10, c 9 d 10, 9 e f 10, g h 10 9, i 9 10 j, 9 k 10 L, m n 1 10, o 1 10 p, q r 10 1

Здесь много возможных исходов, которые следует обдумать.

К счастью, если вы поймете куда лучше поставить 8 и 7, то количество возможностей уменьшится, и получится список, представленный ниже (при условии, что вы не допустили ошибок!). После того, как будет закончен нижний ряд, будет легко закончить каждый следующий.

8 3 10 9, 6 1 10 8, 8 1 10 6

Пирамиды размером 15, 21 или более оставим для самых увлеченных. Удачи!